

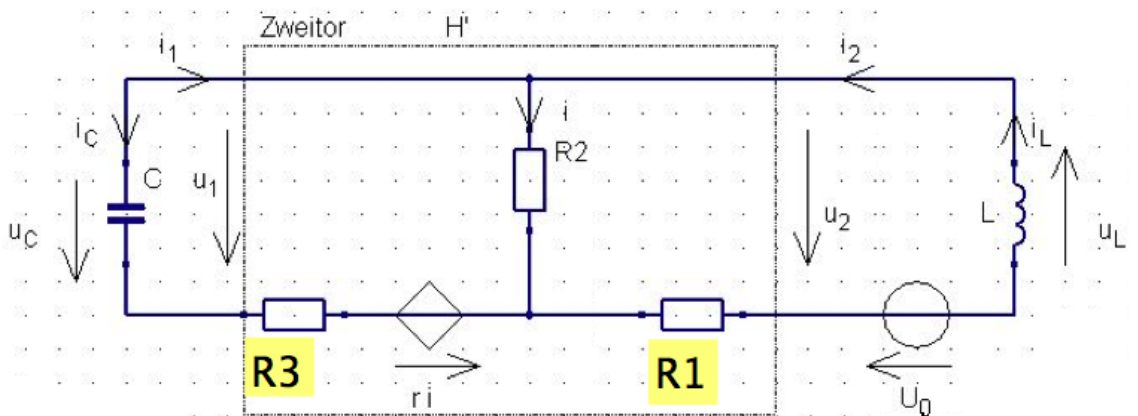
## 4 Schaltung 2. Grades, Phasenportraits

a) Die Zustandsgrößen sind  $u_C$  und  $i_L$ .

willkürliche Festlegung: Der Zustandsvektor heißt  $\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$ .

b) Durch Strecken und optionales Spiegeln der Schaltung erhalten wir am linken Tor (1) die Kapazität und am rechten Tor (2) die Induktivität. Da die Reihenfolge in einer Serienschaltung theoretisch beliebig ist, können wir die Spannungsquelle  $U_0$  auch herausziehen und ein Zweitor definieren.

Anmerkung: Die Zählpfeile an der Spule wurden auch assoziiert, aber nach Konvention nach oben ausgerichtet. Eine Orientierung nach unten hat keine Auswirkung aufs Ergebnis



c) Die Zustandsmatrix  $\mathbf{A}$  gibt uns neben dem Integral einen weiteren Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und ihren Ableitungen und ermöglicht uns, Lösungsformeln zu verwenden und das Phasenportrait schnell zu zeichnen.

Zweitorbeschreibung:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

4 Unbekannte in der Matrix, 6 Unbekannte Ströme/ Spannungen  $\Rightarrow$  6 Gleichungen!

(1)  $i_{01} = 0$

(2)  $u_{02} = -U_0 = 0$  (siehe Angabe zu d) )

(3)  $u_1 = u_C$

(4)  $i_2 = i_L$  (Zustandsgrößen!)

(5)  $u_1 = i \cdot R_2 - r \cdot i + i_1 R_3$   
da  $R_i = r = R$  folgt:  $u_1 = i_1 R \Leftrightarrow i_1 = u_C / R$

(6)  $u_2 = i \cdot R + i_2 R = (i_1 + i_2) + i_2 R$   
unter Verwendung obiger Ergebnisse ergibt sich:  
 $u_2 = u_C + 2 \cdot i_L \cdot R$

Daraus kann die Matrix-Darstellung der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$  entwickelt werden:

$$\begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 1 & +2R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -U_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ -U_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 1 & 2R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich Eigenwerte wie in der Tutorübung berechnet\* zu

$$\lambda_1 = -\frac{1}{RC}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2R}{L}$$

\*Tipp beim Nachrechnen: Versuche, Diskriminante auf binomische Formel zu bringen

- d) Nach Einsetzen und passender Skalierung der Einheiten der Eigenvektoren der Bauelementewerte ergibt sich:

$$\lambda_2 = -10\text{s}^{-1}; \quad \lambda_1 = -20\text{s}^{-1}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1\text{V} \\ 1\text{A} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\text{A} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Die Eigenwerte wurden dabei so indiziert, dass die Konvention  $\|\lambda_1\| \geq \|\lambda_2\|$  erfüllt bzw. in diesem Fall  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  gilt.

Damit ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung der Form  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  mit der allgemeinen Lösung

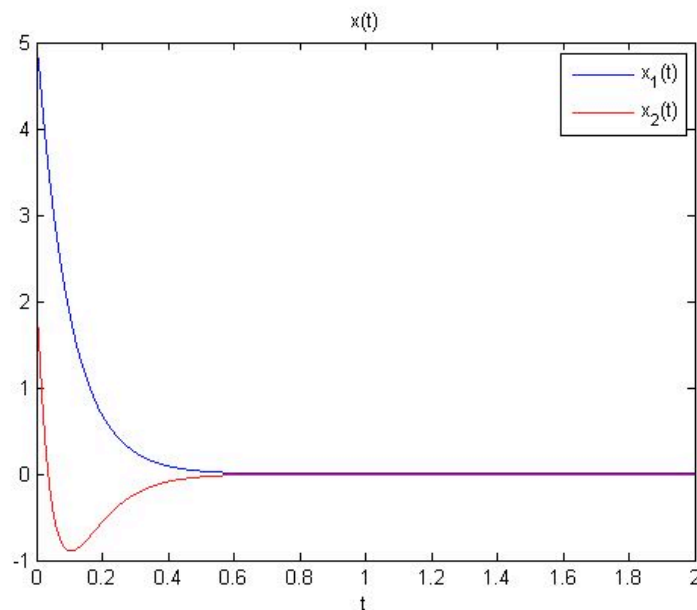
$$\mathbf{x}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) \mathbf{q}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) \mathbf{q}_2 \quad (8)$$

$$\text{und } \mathbf{x}(t=0) = c_1 \mathbf{q}_1 + c_2 \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 5\text{V} \\ 2\text{A} \end{bmatrix} \quad (9)$$

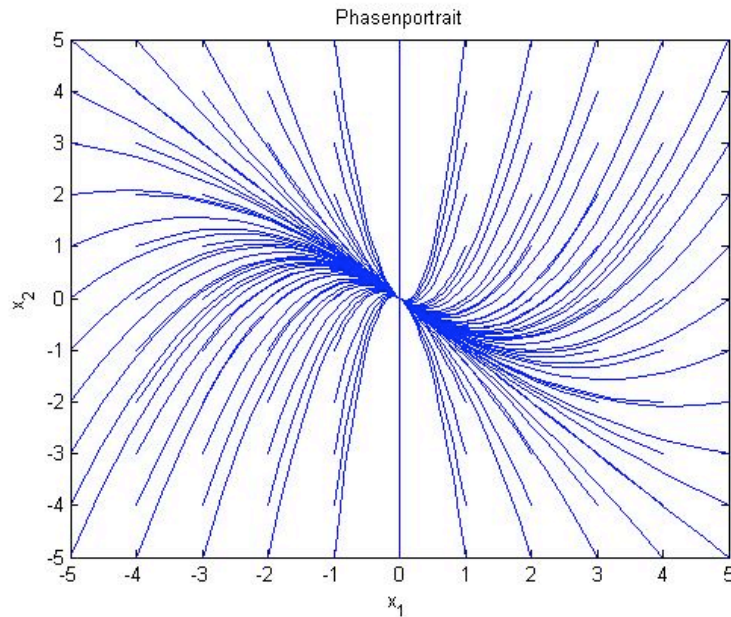
$$\Rightarrow c_1 = 7; \quad c_2 = -5 \quad (10)$$

$$\mathbf{x}(t) = -5 \exp(-10\text{s}^{-1}t) \begin{bmatrix} -1\text{V} \\ 1\text{A} \end{bmatrix} + 7 \exp(-20\text{s}^{-1}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1\text{A} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$(12)$$



e)



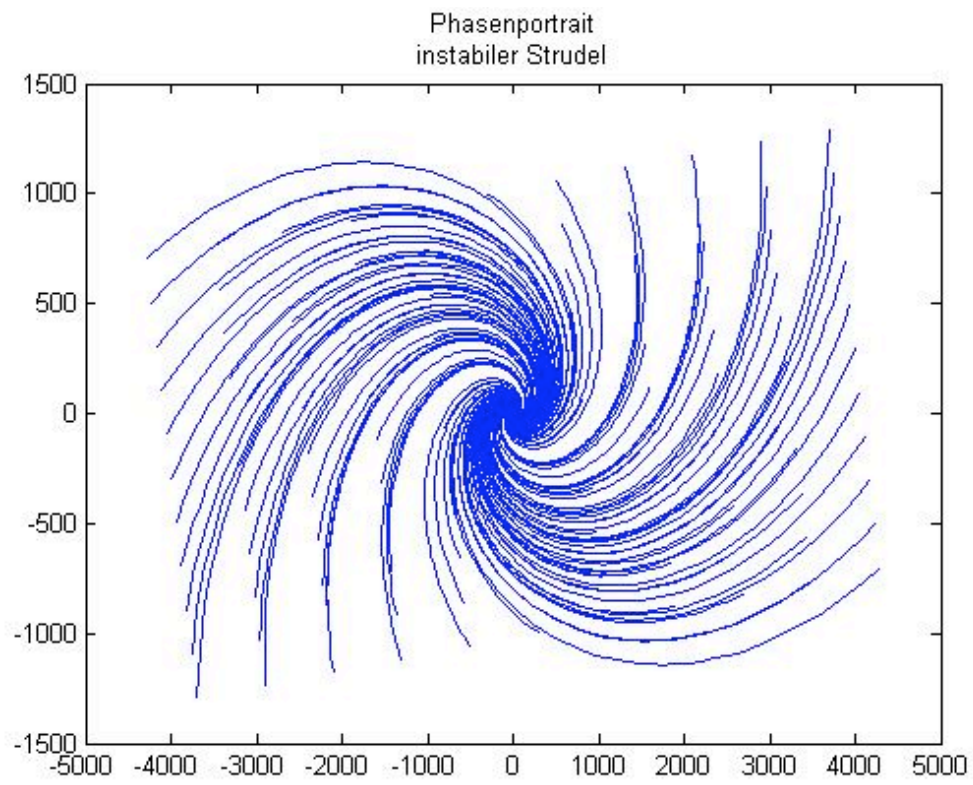
g) Für  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  ergeben sich die Eigenwerte und -vektoren zu

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 4j \\ 3 - 4j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \bar{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}j \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (13)$$

Das System ist also instabil, da die Realteile der Eigenwerte positiv sind. Für konjugiert komplexe Eigenwerte ergibt sich als Phasenportrait ein instabiler Strudel. Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil  $\lambda = \alpha + j\beta$  bzw.  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_r + j\mathbf{q}_i$  ergibt sich als Lösung

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \exp(\alpha t) [\cos(\beta t)\mathbf{q}_r - \sin(\beta t)\mathbf{q}_i] + c_2 \exp(\alpha t) [\sin(\beta t)\mathbf{q}_r + \cos(\beta t)\mathbf{q}_i] = \quad (14)$$

$$c_1 \exp(3t) \left( \cos(4t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(4t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) + c_2 \exp(3t) \left( \sin(4t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(4t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) \quad (15)$$



h)