

## Tutorübung 5 - ST2

### 1 Blatt 4 mit konstanter Spannungsquelle

Hier berechnen wir die Lösung für eine inhomogene lineare dynamische Schaltung zweiten Grades.

Wir kennen aus Blatt 4 die homogene Lösung:

$$x_h(t) = c_1 e^{-\frac{10t}{s}} \begin{bmatrix} -1V \\ 1A \end{bmatrix} + c_2 e^{-20\frac{t}{s}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1A \end{bmatrix}$$

Nun berechnen wir den Fixpunkt, der sonst dem Ursprung entspricht, nach der Formelsammlung:

$$x_\infty = -A^{-1}(bv_0) = -\frac{1}{\frac{2}{CL}} \begin{bmatrix} -2\frac{R}{L} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{2R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{2V} A \end{bmatrix}$$

Wir arbeiten mit der Koordinatentransformation  $x' = x - x_\infty$ . Das erlaubt uns die Berechnung der homogenen Lösung nach dem bekannten Schema. Die Anfangswerte sind hier aber dann auch verschoben:

$$x'_0 = x_0 - x_\infty = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{2V} A \end{bmatrix}$$

Ebenfalls nach Formelsammlung für den inhomogenen Fall berechnen wir die Koeffizienten  $c_i$  der Teillösungen aus den Anfangswerten:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot (-1V) + 0 \cdot c_2 &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ c_2 &= -\frac{U_0}{2V} \end{aligned}$$

Die **Gesamtlösung** ergibt sich aus der Rücktransformation  $x' + x_\infty$  (siehe "Hin" Transformation oben, auf  $x$  auflösen...):

$$x = x' + x_\infty = \left(-\frac{U_0}{2V}\right) e^{-20\frac{t}{s}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_0}{2V} A \end{bmatrix}$$

### 2 Synthese einer dynamischen Schaltung

Gegeben war ein Phasenportrait für die Zustandsgrößen  $x$  unserer Schaltung. Bekannt bzw. gefordert waren außerdem Zeitverläufe für transformierte Zustandsgrößen  $\xi = Q^{-1}x$ , wobei  $Q$  eine Matrix aus den Eigenvektoren ist  $Q = [q_1, q_2]$ , die rein mathematisch folgende Bedeutung hat: Sie dreht und streckt das einfache Phasenportrait aus der Formelsammlung. Das heißt, es gibt jedes erdenkliche Phasenportrait - allerdings lässt sich jedes auf eines der Grundtypen zurückführen.

Für Verschiebungen aus dem Ursprung benötigen wir eine Koordinatentransformation wie in Aufgabe 1.

Die Suche nach den Eigenwerten, also nach den Zeitkonstanten ( $\tau = -\frac{1}{\lambda}$ ) der Bauteil(gruppen) geht folgendermaßen:

- Die Eigenvektoren und den Fixpunkt lesen wir aus dem Phasenportrait ab.
- Den Fixpunkt rechnen wir um in die  $\xi$ -Ebene und tragen sie in die Zeitverläufe ein
- Über die Tangenten an den Anfangswert ( $t = 0$ ) ermitteln wir die Eigenwerte
- Die Kapazität des Kondensators hängt über  $\tau = R \cdot C$  zusammen mit dem Eigenwert über:  
 $\tau = -\frac{1}{\lambda}$

**Lösung:**

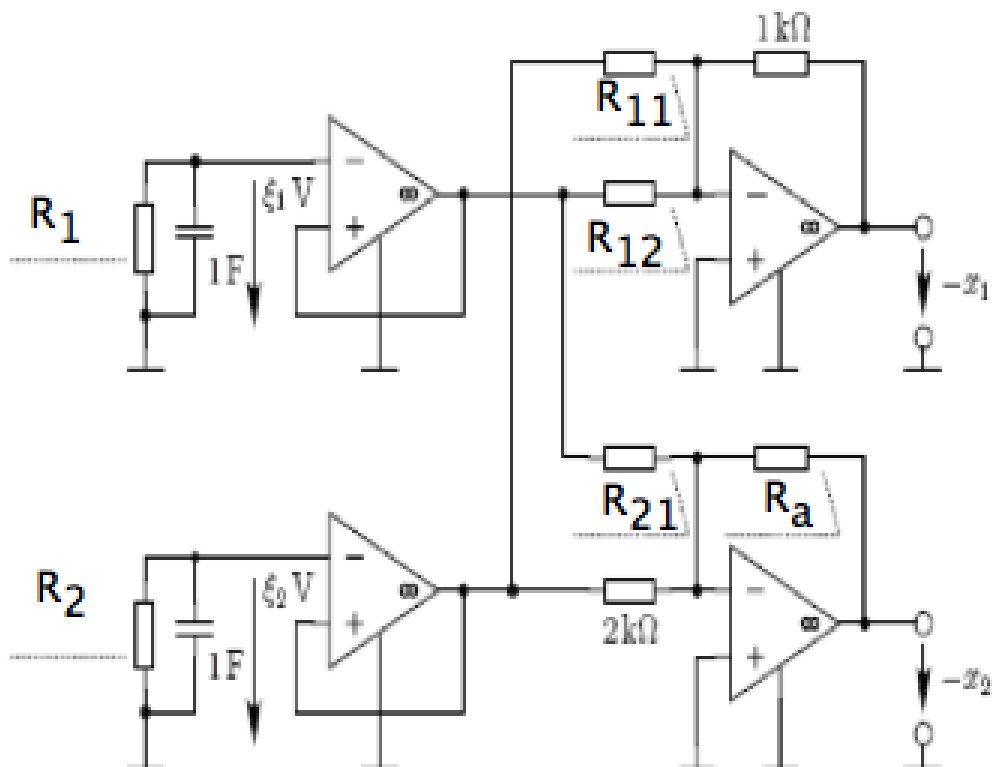
Eigenvektoren (Numerierung nach Angabe):  $Q = [q_1, q_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Fixpunkt:  $\xi_\infty = Q^{-1}x_\infty = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1V \\ -1V \end{bmatrix} = \frac{1}{-3V} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1V \\ -1V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

aus den Tangenten liest man:  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = -1$

Rücktrafo über Matrixmultiplikation:  $Q \cdot \xi = x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 + 1\xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{bmatrix}$

aus  $\tau = R \cdot C$  und Maschengleichungen (z.B. über Masse-- $x_1$ - $1k\Omega$ - $R_{12}$ -Nullator- $\xi_2$ -Masse) ergeben sich folgende Bauteilwerte:



$$R_1 = -0,5 \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$R_{11} = 0,5 k\Omega$$

$$R_{12} = 1 k\Omega$$

$$R_{21} = -2 k\Omega$$

$$R_a = -2 k\Omega$$

(man kann auch "blind" die Formeln für den Verstärkungsfaktor von Op-Amps ansetzen)