.

Probeklausur

Schaltungstechnik 2

Datum: ________

ca. 60 min Bearbeitungszeit

Musterlösung

31

Aufgabe 1 Realisierung einer Schaltung 2. Grades (31 Punkte)

In dieser Aufgabe wird zuerst die allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$0 = v_1 y(t) + v_2 \dot{y}(t) + v_3 \ddot{y}(t) + v_4$$

mit den Anfangswerten $y(t_0) = z_0, \ddot{y}(t_0) = z_2$ untersucht und dann eine spezielle Differentialgleichung realisiert.

3

a)* Trennen Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung in zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung, indem Sie $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$ substituieren.

$\dot{x}_1 = x_2$ √
$0 = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 \dot{x}_2 + v_4$ √
$\dot{x}_2 = -\frac{v_1}{v_3} x_1 - \frac{v_2}{v_3} x_2 - \frac{v_4}{v_3}$ √

2

b) Bringen Sie das Differentialgleichungssystem auf die Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v$ und identifizieren Sie $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$, wenn $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ und $v = 1$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v_1}{v_3} & -\frac{v_2}{v_3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_4}{v_3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} \surd\surd$$

c)* Geben Sie den Anfangswert $\boldsymbol{x}(t_0)$ in Abhängigkeit von v_1, v_2, v_3, v_4, z_0 und z_2 an. 3

$$x_1(t_0) = z_0 \;\surd$$
$$0 = v_1 z_0 + v_2 x_2(t_0) + v_3 z_2 + v_4$$
$$x_2(t_0) = -\tfrac{v_1}{v_2} z_0 - \tfrac{v_3}{v_2} z_2 - \tfrac{v_4}{v_2} \;\surd$$
$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} z_0 \\ -\frac{v_1 z_0 + v_3 z_2 + v_4}{v_2} \end{bmatrix} \surd$$

d) Wie lautet der Fixpunkt $\boldsymbol{x}_\infty$ des Differentialgleichungssystems in Abhängigkeit von v_1, v_2, v_3 und v_4? 3

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v_1}{v_3} & -\frac{v_2}{v_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_4}{v_3} \end{bmatrix} \surd, \qquad \Rightarrow x_2 = 0,\, x_1 = -\frac{v_4}{v_3}\frac{v_3}{v_1} = -\frac{v_4}{v_1}$$
$$\boldsymbol{x}_\infty = \begin{bmatrix} -\frac{v_4}{v_1} \\ 0 \end{bmatrix} \surd\surd$$

2 e) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\boldsymbol{q}_1$ und $\boldsymbol{q}_2$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten λ_1 und λ_2.

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\, \boldsymbol{q}_1 = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \surd$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \mathbf{1})\, \boldsymbol{q}_2 = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \surd$$

3 f) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Matrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von v_1, v_2, v_3 und v_4.

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{v_2}{2v_3} \pm \sqrt{\left(\tfrac{v_2}{2v_3}\right)^2 - \tfrac{v_1}{v_3}} \ \surd\surd\surd$$

26 **Aufgabe 2** Nichtlineare Schaltung 1. Grades (26 Punkte)

Ein noch nicht identifiziertes, zeitinvariantes Netzwerkelement wird in dieser Aufgabe analysiert. An das Element wird der Spannungsverlauf

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\mathrm{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

angelegt und der Stromverlauf $i_1(t)$, dargestellt in Bild 2, gemessen.

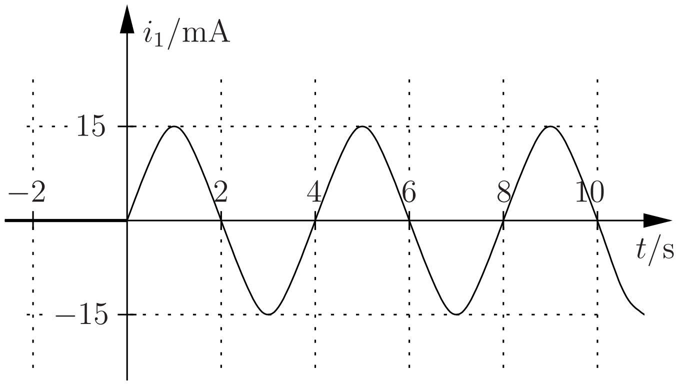


Bild 2. Verlauf von $i_1(t)$

2 a)* Bestimmen Sie den Stromverlauf $i_1(t)$ formelmäßig.

$$i_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 15\mathrm{mA}\sin\left(2\pi\frac{t}{4\mathrm{s}}\right), & t \geq 0 \end{cases} \quad \surd\surd$$

1 b)* Zeichnen Sie in Bild 3 den Zusammenhang in der u_1-i_1-Ebene. Beschriften Sie die Achsen korrekt.

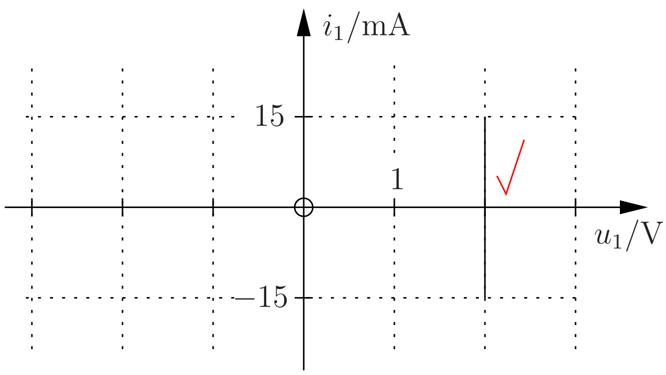


Bild 3. u_1-i_1-Ebene

c) Berechnen Sie den Fluß $\phi_1(t)$ und die Ladung $q_1(t)$ unter der Annahme, dass $\phi_1(t) = 0$ und $q_1(t) = 0$ für $t < 0$. 4

$$\phi_1(t) = \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\mathrm{V}\cdot t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \surd$$

$$q_1(t) = \int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t i_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{30}{\pi}\mathrm{mA}\cdot\mathrm{s}\cdot\left[1-\cos\left(2\pi\frac{t}{4\mathrm{s}}\right)\right], & t \geq 0 \end{cases} \quad \surd\surd\surd$$

d) Zeichnen Sie in Bild 4 den Zusammenhang in der i_1-ϕ_1-Ebene, in Bild 5 den Zusammenhang in der u_1-q_1-Ebene und in Bild 6 den Zusammenhang in der ϕ_1-q_1-Ebene. 6

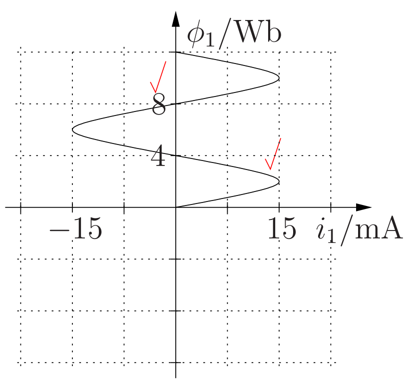


Bild 4. i_1-ϕ_1-Ebene

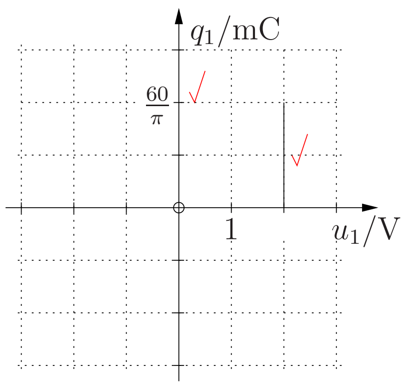


Bild 5. u_1-q_1-Ebene

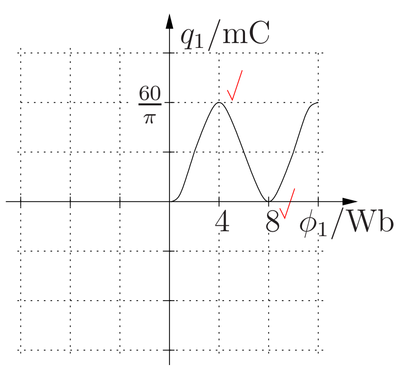


Bild 6. ϕ_1-q_1-Ebene

2

e) Kann es sich um ein zeitinvariantes, resistives Bauelement handeln? Wenn ja, wie würde der Zusammenhang lauten, der das Element beschreibt? Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Nein, da man die Zeit aus der Beziehung zwischen Strom und Spannung nicht eliminieren kann. $\surd\surd$

2

f) Kann das Element eine zeitinvariante Induktivität sein? Wenn ja, wie würde der Zusammenhang lauten, der das Element beschreibt? Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, $i(\phi) = 15\mathrm{mA}\sin(2\pi\frac{\phi}{8\mathrm{Vs}})$ $\surd\surd$

g) Kann das Element eine zeitinvariante Kapazität sein? Wenn ja, wie würde der Zusammenhang lauten, der das Element beschreibt? Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort. 2

Nein, da man die Zeit aus der Beziehung zwischen Ladung und Spannung nicht eliminieren kann. $\surd\surd$

h) Kann das Element ein zeitinvarianter Memristor sein? Wenn ja, wie würde der Zusammenhang lauten, der das Element beschreibt? Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort. 2

Ja, $q(\phi) = \frac{30}{\pi}\mathrm{mA} \cdot \mathrm{s} \cdot \left[1 - \cos(2\pi \frac{\phi}{8\mathrm{Vs}})\right]$ $\surd\surd$

An dasselbe Element wurde zu einem anderen Bezugszeitpunkt der Spannungsverlauf

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4\mathrm{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

angelegt und der Stromverlauf $i_2(t)$, gezeigt in Bild 7, gemessen. Wiederum wird angenommen, dass $\phi_2(t) = 0$ und $q_2(t) = 0$ für $t < 0$.

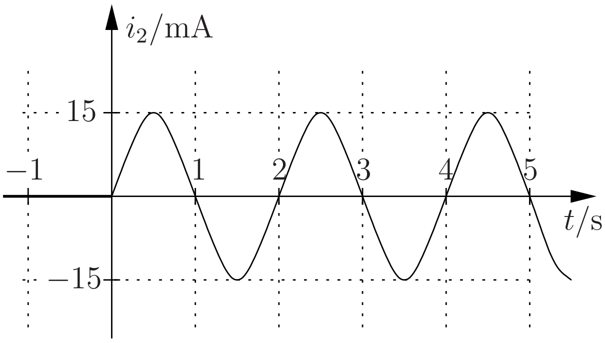


Bild 7. $i_2(t)$-Verlauf

5 i) Überprüfen Sie, ob sich mit dem Spannungsverlauf $u_2(t)$ und dem Stromverlauf $i_2(t)$ der selbe Zusammenhang ergibt, wie in den Teilaufgaben e) - h), bei denen Sie mit "Ja" geantwortet haben. Entscheiden Sie, ob das Netzwerkelement resistiv, induktiv, kapazitiv oder memristiv ist.

$$\phi_2(t) = \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4\mathrm{V} \cdot t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 15\mathrm{mA} \sin\left(2\pi \frac{t}{2\mathrm{s}}\right), & t \geq 0 \end{cases} \quad \surd$$

$$\Rightarrow i_2(\phi_2) = i_1(\phi_1) = i(\phi) = 15\mathrm{mA} \sin\left(2\pi \frac{\phi}{8\mathrm{Vs}}\right) \quad \surd$$

$$q_2(t) = \int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t i_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{15}{\pi}\mathrm{mA} \cdot \mathrm{s} \cdot \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{2\mathrm{s}}\right)\right], & t \geq 0 \end{cases} \quad \surd$$

$q_2(\phi_2) \neq q_1(\phi_1)$ $\surd$

$\Rightarrow$ induktiv $\surd$

38 Aufgabe 1 Aufladen einer Kapazität (38 Punkte)

Gegeben sei folgende lineare Schaltung ersten Grades mit zunächst einer Spannungsquelle:

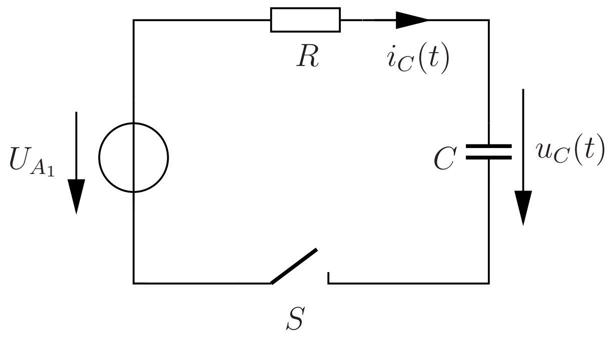


Bild 1. Schaltung ersten Grades mit einer Quelle

Die Spannungsquelle habe die konstante Spannung U_{A_1}. Der Widerstand R und die Kapaität C seien beide positiv. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Schalter S geschlossen und es werden nur Zeiten $0 \leq t \leq T$ betrachtet. Die Kapazität sei zu diesem Zeitpunkt ungeladen, d.h., $u_C(t = 0) = 0\,\mathrm{V}$.

1 a)* Gegen welchen Wert u_∞ konvergiert die Spannung $u_C(t)$ für $t \to \infty$?

$$u_\infty = U_{A_1} \quad \surd$$

2 b) Wie lautet der Zeitverlauf der Kondensatorspannung $u_C(t)$? Verwenden Sie dabei für das Produkt RC die Zeitkonstante τ.

$$u_C(t) = U_{A_1}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \surd\surd$$

2 c) Bestimmen Sie den Strom $i_C(t)$, der durch die Kapazität fließt.

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}u_C(t) = \frac{CU_{A_1}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \surd\surd$$

d) Zum Zeitpunkt $t = T$ soll der Kondensator auf die Spannung $u_C(T) = U_{\text{soll}}$ aufgeladen sein. Welchen Wert U_{A_1} muss die Spannungsquelle daher haben? 2

$$u_C(T) = U_{A_1}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}) \stackrel{!}{=} U_{\text{soll}} \checkmark \;\Rightarrow\; U_{A_1} = \frac{U_{\text{soll}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}} \checkmark$$

e) Bestimmen Sie mit Hilfe der letzten drei Teilaufgaben die Energie W_1 als Funktion von U_{soll}, die die Quelle vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = T$ abgegeben hat. 5

Leistung: $p(t) = U_{A_1} i_C(t) \checkmark = \dfrac{CU_{A_1}^2}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \checkmark$

Energie: $W_1 = \displaystyle\int_{t=0}^{T} p(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{CU_{A_1}^2}{\tau}\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^T \checkmark = CU_{A_1}^2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}\right) \checkmark$

$$W_1 = \frac{CU_{\text{soll}}^2}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}} \checkmark$$

2. Aufladevorgang

[Damit entfallen die Aufgaben f) bis i)]

Die **Quelle** wird durch $U_{A2}(t)$ ersetzt und hat nun folgenden Zeitverlauf:

$$U_{A2}(t) = U_B \frac{t+\tau}{T}$$

Für die **Kondensatorspannung** ergibt sich damit folgende Antwort:

$$u_c(t) = U_B \frac{t}{T}$$

1

j) Wie groß ist U_B zu wählen, damit am Kondensator nach der Zeit T die Spannung $u_C(T) = U_{\text{soll}}$ anliegt?

$u_C(T) = U_B = U_{\text{soll}}$ √

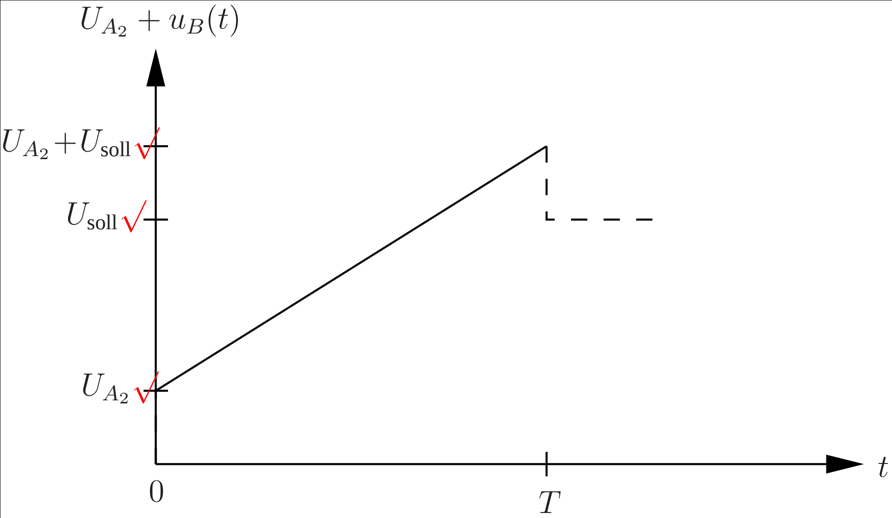
1

k) Welche Spannung müssen die beiden Quellen für $t > T$ bereitstellen, damit am Kondensator weiterhin die Spannung $u_C(t) = U_{\text{soll}}$ anliegt?

Für $t > T$ muss $U_{A_2} + u_B(t) = U_{\text{soll}}$ gelten. √

3

l) Skizzieren Sie die Summe der Spannungen der beiden Quellen über der Zeit für $0 \leq t \leq T + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Kennzeichnen Sie relevante Punkte.



m) Berechnen Sie den Strom $i_C(t)$ für $0 \leq t \leq T$, der durch die Kapazität fließt, und die daraus resultierende Momentanleistung, die die beiden Quellen in Summe abgeben. 3

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}u_C(t) = \frac{CU_{\text{soll}}}{T} \checkmark$$

$$p(t) = i_C(t)\,(U_{A_2} + u_B(t)) = \frac{CU_{\text{soll}}^2}{T^2}(t+\tau) \checkmark\checkmark$$

n) Welche Energie W_2 haben die beiden Quellen in Summe bis zum Zeitpunkt $t = T$ abgegeben? 3

$$W_2 = \int_{t=0}^{T} p(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{CU_{\text{soll}}^2}{T^2}\left(\frac{T^2}{2} + T\tau\right) \checkmark = \frac{1}{2}CU_{\text{soll}}^2\left(1 + 2\frac{\tau}{T}\right) \checkmark\checkmark$$

Das Verhältnis $\frac{W_1}{W_2}$ der beiden Energien aus den Teilaufgaben e) und n) ergibt für $T > 0$ den Wert

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T})(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}})}. \tag{6}$$

o)* Welchen Wert nimmt dieser Quotient für $\tau \to 0$ an? 1

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{W_1}{W_2} = 2\checkmark$$

4 p)* Welchen Wert nimmt der Quotient $\frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\tau}{T}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}}$ für $\tau \to \infty$ an?

Hinweis: Setzen Sie $x = \frac{T}{\tau}$ und lassen Sie x gegen Null gehen!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \checkmark = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x+2}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \checkmark \overset{\text{(De L'Hospital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x+4-2x}{(x+2)^2}}{\mathrm{e}^{-x}} \checkmark = 1 \checkmark$$

2 q) Welcher Aufladevorgang kommt somit mit weniger Energie aus?

Hinweis: Der Quotient $\frac{W_1}{W_2}$ ist für $\tau \geq 0$ stetig und streng monoton.

Das Aufladen des Kondensators mittels einer Konstantspannungsquelle verbraucht genausoviel bis doppelt so viel Energie wie die Quelle mit angehobener rampenförmiger Aufladespannung. $\checkmark\checkmark$

8

Aufgabe 4 Verständnisfragen (8 Punkte)

8

a)* Klassifizieren Sie folgende Aussagen als falsch oder richtig. Für jede richtig klassifizierte Aussage erhalten Sie einen Punkt, jede falsch klassifizierte Aussage vermindert Ihre Punktezahl um eins. Eine fehlende Antwort ändert Ihre Punktesumme nicht. Die minimale Punktezahl der Aufgabe beträgt Null.

Aussage	**richtig**	**falsch**
Eine rein imaginäre Impedanz nimmt nur Wirkleistung auf.		√
Bei einem Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90 Grad voraus.	√	
Ein dynamisches System mit nicht invertierbarer Zustandsmatrix kann keinen Fixpunkt haben.		√
Für einen Leerlauf existiert keine induktive Beschreibungsform.		√
Die Nullstellen des Zählerpolynoms einer Übertragungsfunktion bestimmen die Stabilität der Schaltung.		√
Ein Tiefpass sperrt bei niedrigen Frequenzen.		√
Die Ortskurve zeigt den Real- und Imaginärteil einer Übertragungsfunktion.	√	
Das Superpositionsprinzip gilt nur in linearen Netzwerken.	√	